Une Extension Multidimensionnelle de la Loi de L'arc Sinus

Martin Barlow
Trinity College
Cambridge CB2 1TQ
England

Jim Pitman
Department of Statistics
University of California
Berkeley, California 94720
United States

Marc Yor
Laboratoire de Probabilités
Université P. et M. Curie
4, place Jussieu - Tour 56
75252 Paris Cedex 05, France

Research supported in part by NSF Grant 88-01808.
To appear in Séminaire de Probabilités XXIII, 1989.

Technical Report No. 196
February 1989

Department of Statistics
University of California
Berkeley, California

UNE EXTENSION MULTIDIMENSIONNELLE DE LA LOI DE L'ARC SINUS

Martin BARLOW	Jim PITMAN	Marc YOR
Trinity College	*Department of Statistics*	*Laboratoire de Probabilités*
Cambridge CB2 1TQ	*University of California*	*Université P. et M. Curie*
England	*Berkeley, California 94720*	*4, place Jussieu - Tour 56*
	United States	*75252 Paris Cedex 05, France*

1. Introduction.

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0. On note :

$$g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\} \quad \text{et} \quad A_t = \int_0^t ds\, 1_{(B_s > 0)}.$$

Remarquons que, pour $t > 0$ donné, on a :

$$g_t \overset{(\text{loi})}{=} t\, g_1 \quad \text{et} \quad A_t \overset{(\text{loi})}{=} t\, A_1.$$

P. Lévy ([11a], [11b]) a montré que les variables g_1 et A_1 suivent la loi de l'arc sinus, c'est-à-dire :

$$\text{(1.a)}^{*} \qquad P(g_1 \in dt) = P(A_1 \in dt) = \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} \qquad (0 < t < 1)$$

De nombreuses démonstrations de ces résultats ont maintenant été données (voir, par exemple, Kac [13], Williams [12], Pitman-Yor [7], Karatzas-Shreve [5], Rogers-Williams [8] section 53) ; P. Lévy [11a] et Pitman-Yor [7] utilisent le fait que les variables suivantes :

$$\text{(1.b)} \qquad \frac{\sigma}{\sigma+\tilde{\sigma}} \overset{(\text{loi})}{=} \frac{N^2}{N^2+\tilde{N}^2} \overset{(\text{loi})}{=} \cos^2\theta$$

suivent la loi de l'arc sinus, lorsque σ et $\tilde{\sigma}$ désignent deux copies indépendantes du premier temps d'atteinte de 1 par $(B_t, t \geq 0)$, N et $\tilde{N}$ sont deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes, et θ est une variable uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$.

La démonstration de (1.b) repose sur les deux remarques suivantes :

$$\text{(i)} \qquad (\sigma, \tilde{\sigma}) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{1}{\tilde{N}^2}, \frac{1}{N^2}\right)$$

* Ce travail a été réalisé avec l'aide partielle de NSF Grant DMS 88 - 01808

(ii) $\theta \equiv \arg(N+i\tilde{N})$ est uniformément distribuée sur $[0,2\pi[$ (et, de plus, indépendante de $N^2+\tilde{N}^2$).

(1.2) Décrivons maintenant l'extension du résultat (1.a) que nous avons en vue :

- commençons par remplacer le mouvement brownien réel par un processus de Markov (X_t) à valeurs dans E_k, l'union de k demi-droites concourantes $I_i (i = 1,2,\dots,k)$ du plan, dont on note 0 le point d'intersection. On suppose que $X_o = 0$, et que (X_t) se comporte comme un mouvement brownien sur chacune des demi-droites et, lorsqu'il arrive en 0, choisit avec probabilité p_i la demi-droite I_i, la probabilité $(p_i)_{1\le i\le k}$ étant supposée donnée.

Cette description est seulement d'ordre heuristique, le point 0 étant régulier pour lui-même, relativement au processus X. En fait, il n'est pas difficile de décrire précisément un tel processus à l'aide de la théorie des excursions : en particulier, la mesure caractéristique des excursions hors de 0 du processus (X_t) est : $\sum_{i=1}^{k} p_i n_i$ où n_i est obtenue (de manière évidente) à partir de la mesure d'Itô des excursions positives du mouvement brownien réel.

Une description détaillée du processus de Markov (X_t) est faite dans notre article [14] sur le processus de Walsh, également publié dans ce volume.

- plus généralement, le modèle que nous considèrerons dans cette rédaction est celui présenté ci-dessus, mais dans lequel on a remplacé le mouvement brownien sur les demi-droites I_i par un processus de Bessel de dimension $\delta \in (0,2)$.

Nous nous proposons d'expliciter, dans ce cadre général, la loi du vecteur

$$\left\{A_i(u) = \int_0^u ds\, 1_{(X_s\in I_i)} \; ; \; i \le k\right\}$$

pour u fixé.

Il est souvent commode de considérer, au lieu de la dimension δ, l'indice μ, lié à δ par la formule : $\delta = 2(1-\mu)$; μ décrit donc l'intervalle $(0,1)$. Nous utiliserons également la quantité $\nu = 1/_{\mu}$.

Nous appellerons ce processus de Markov à valeurs dans E_k <u>processus de Walsh d'indice</u> μ, <u>associé à la probabilité</u> $(p_i)_{i\le k}$, et nous noterons ce processus $W_k(\mu\,;\,(p_i)_{i\le k})$; c'est en effet Walsh [10] qui a, le premier, introduit de tels processus.

Lorsque $k = 2$ et $\delta = 1$, le processus (X_t) peut être identifié au skew Brownian motion tel que :

$$(1.c) \qquad P(X_t > 0) = p_1 \quad ; \quad P(X_t < 0) = p_2 \equiv 1-p_1.$$

Les skew Brownian motions, introduits par Itô-Mc Kean [4], ont été étudiés ensuite par Walsh [10], Harrison-Shepp [3], Brooks-Chacon [1] ; ils interviennent de façon naturelle dans certains théorèmes limites pour les diffusions réelles (voir Rosenkrantz [9], Le Gall [6], Franchi [2]). On peut présenter le skew Brownian motion satisfaisant (1.c) comme la solution en loi de :

$$(1.d) \qquad X_t = B_t + \frac{1-a}{1+a} L_t^o(X) \qquad\qquad (a > 0)$$

où (B_t) désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, et $L_t^o(X)$ le temps local symétrique de X en 0, a et p_1 étant liés par la formule :

$$(1.e) \qquad p_1 = \frac{1}{1+a}.$$

(1.3) Nous présentons maintenant les deux résultats principaux de ce travail (Théorèmes 1 et 2 ci-dessous).

Précisons tout d'abord le choix du temps local $(\ell_t, t \geq 0)$ de X en 0 que nous adopterons dans toute la suite.

Notons $\tau(t) = \inf\{u : \ell_u > t\}$ l'inverse à droite de $(\ell_u, u \geq 0)$; en anticipant légèrement sur le paragraphe 2, le processus $(\tau(t), t \geq 0)$ est un processus stable unilatéral, d'indice μ. Choisissons-le de façon que :

$$E[\exp - \xi\tau(t)] = \exp - t\xi^{\mu} \qquad (\xi \geq 0),$$

et définissons $(\ell_u \ ; \ u \geq 0)$ comme son inverse à droite.

Nous pouvons maintenant énoncer le

__Théorème 1__ : *Soient* $(T_i \ ; \ i \leq k)$ k *variables positives stables, d'indice* μ, *indépendantes. Alors :*

(i) *pour tout* $u > 0$,

$$\frac{1}{\ell_u^{\nu}} (A_i(u) \ ; \ i \leq k) \overset{(\text{loi})}{=} (p_i^{\nu} T_i \ ; \ i \leq k)$$

(ii) *en conséquence*

$$(A_i(1)\ ;\ i \le k\ ;\ \ell_1^{\nu}) \overset{(\mathrm{loi})}{=} \left(\frac{p_i^{\nu} T_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j}\ ;\ i \le k\ ;\ \left(\sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j \right)^{-1} \right).$$

On obtient un résultat voisin pour le processus $W_k(\mu\ ;\ (p_i)_{i \le k})$ conditionné à être en 0 au temps 1. On appellera ce processus <u>pont de Walsh</u>.

A l'aide des propriétés de scaling, le pont de Walsh peut être réalisé de la manière suivante :

$$Y_u = \frac{1}{\sqrt{g}} X_{ug} \qquad (u \le 1)$$

où $g = \sup\{t \le 1 : X_t = 0\}$; en outre, il n'est pas difficile de montrer que Y et g sont indépendants.

Notons $U_i = \int_0^1 du\, 1_{(Y_u \in I_i)}$, et λ la valeur au temps 1 du temps local en 0 de Y, précisé par la formule :

(1.f) $\qquad \ell_1^{\nu} = g \lambda^{\nu}$

(pour une justification de cette formule, voir le paragraphe 2, remarque(ii)). On a alors le

<u>Théorème 2</u> : *Soient* $(T_i\ ;\ i \le k)$ k *variables positives, stables, d'indice* μ, *indépendantes. Alors :*

i) Soit $f : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *fonction borélienne. On a :*

$$E\left[f\left(\frac{U_i}{\lambda^{\nu}}\ ;\ i \le k \right) \right] = E\left[f(p_i^{\nu} T_i\ ;\ i \le k)\ \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i^{\nu} T_i \right)^{\mu}} \right]$$

ii) en conséquence, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *borélienne, on a :*

$$E\left[f(U_i\ ;\ i \le k\ ;\ \frac{1}{\lambda^{\nu}}) \right]$$

$$= E\left[f\left(\frac{p_i^{\nu} T_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j}\ ;\ i \le k\ ;\ \sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j \right) \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i^{\nu} T_i \right)^{\mu}} \right].$$

(1.4) Lorsque $\mu = 1/2$ (c'est-à-dire dans le cas "brownien"), la formule classique : $P(2T_i \in dt) = \frac{dt}{(2\pi t^3)^{1/2}} e^{-1/2t}$ permet, avec les théorèmes 1 et 2, d'expliciter complètement les lois de $(A_i(1) ; i \leq k)$ et $(U_i ; i \leq k)$. Ces calculs sont présentés au paragraphe 4.

Nous utilisons, au paragraphe 3, pour démontrer les théorèmes 1 et 2, la théorie des excursions. Des calculs voisins, s'appuyant également sur la théorie des excursions, permettent d'obtenir très simplement la transformée de Laplace (en t) de :

$$E\left[\exp - \left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(t)\right)\right] \qquad (\xi_j \geq 0)$$

et donc de retrouver, au moins théoriquement, une partie des résultats du théorème 1. Ces compléments sont développés au paragraphe 4, dans lequel nous présentons également des résultats asymptotiques déduits des Théorèmes 1 et 2 dans le cas $p_i \equiv \frac{1}{k}$ $(i \leq k)$, lorsque $k \longrightarrow \infty$.

Enfin, il a semblé nécessaire, pour la commodité du lecteur, de faire, au paragraphe 2, avant toute démonstration, quelques rappels sur les processus de Bessel de dimension $\delta \in (0,2)$.

(1.5) Les résultats qui figurent dans cet article représentent notre compréhension du sujet jusqu'en Septembre 1988, date à laquelle ils ont été exposés aux Journées de Probabilités de Barcelone. Depuis, nous avons obtenu des compléments importants aux Théorèmes 1 et 2, sous la forme d'identités en loi entre processus ou familles d'excursions. Ces nouveaux résultats, rassemblés en [15], feront l'objet d'une publication ultérieure.

2. Rappels sur les processus de Bessel.

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont classiques ; le lecteur trouvera une discussion détaillée dans Kent [16] et Molchanov-Ostrovski [17], par exemple.

(2.1) Notons $(R_t, t \geq 0)$ le processus de Bessel de dimension $\delta = 2(1-\mu) \in (0,2)$, issu de 0, et admettant 0 pour barrière instantanément réfléchissante.

Cette diffusion, à valeurs dans $[0,\infty[$, admet pour fonction d'échelle

$s(x) = c/_{x^{\delta-2}} = c\, x^{2\mu}$, et pour mesure de vitesse $m(dx) = m'(x)dx$, où

$m'(x) = c' x^{\delta-1} = c' x^{1-2\mu}$, c' étant convenablement choisie en fonction de c.

Fixons provisoirement $\alpha > 0$; il existe une famille bicontinue

$(\ell_t^x\, ; x \ge 0, t \ge 0)$ de temps locaux de R, définie au moyen de la formule :

(2.a) $$\int_0^t ds\, f(R_s) = \alpha \int_0^\infty dx\, x^{\delta-1}\, \ell_t^x\, f(x)$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne.

Nous allons maintenant choisir α de façon à ce que les calculs que nous ferons dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 soient aussi simples que possible.

De la propriété de scaling, vérifiée par R :

pour $c > 0$, $(R_{ct}\ ;\ t \ge 0) \overset{(\text{loi})}{=} (\sqrt{c}\, R_t\ ;\ t \ge 0)$

on déduit l'identité :

$$(\ell_{ct}^x\ ;\ x \ge 0, t \ge 0) \overset{(\text{loi})}{=} \left[c^\mu\, \ell_t^{x/\sqrt{c}}\ ;\ x \ge 0, t \ge 0\right].$$

En particulier, en notant simplement ℓ_t pour ℓ_t^o , on a :

(2.b) $$(\ell_{ct}\ ;\ t \ge 0) \overset{(\text{loi})}{=} (c^\mu\, \ell_t\ ;\ t \ge 0)$$

dont on déduit, pour le processus $\tau(t) \equiv \inf\{u : \ell_u > t\}$ la propriété de scaling :

(2.c) $$(\tau(t)\ ;\ t \ge 0) \overset{(\text{loi})}{=} (c\tau(t/_{c^\mu})\ ;\ t \ge 0).$$

En conséquence, le processus $(\tau(t), t \ge 0)$, qui est à accroissements indépendants, est un processus stable, unilatéral, d'indice μ, c'est-à-dire qu'il existe une constante γ, dépendant de α, telle que :

$$E[\exp - \xi\tau(t)] = \exp - t\gamma\xi^\mu \qquad (\xi \ge 0).$$

Pour simplifier les calculs qui suivent, nous prenons $\gamma = 1$, et la détermination correspondante de α, constante que nous notons α_μ , maintenant fixée une fois pour toutes.

Pour être tout à fait précis, explicitons α_μ :

- de l'égalité : $E\left[\int_0^\infty dt\ e^{-\xi\tau(t)}\right] = E\left[\int_0^\infty d\ell_s\ e^{-\xi s}\right]$,

et de la propriété de scaling (2.b), on déduit :

$$\beta_\mu \equiv E[\ell_1] = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}$$

- d'autre part, d'après (2.a) et la propriété de scaling vérifiée par R, on a :

$$\alpha_\mu \beta_\mu x^{\delta-1} \underset{x\to 0}{\sim} 2 \int_0^1 du\ p_1(0;\frac{x}{u})$$

où $p_1(0;y) = \dfrac{2}{2^{\delta/2}\ \Gamma(\frac{\delta}{2})}\ y^{\delta-1}\ \exp(-\frac{y^2}{2})$

est la valeur du semi-groupe de R, issu de 0, pris au temps 1.

Finalement, on obtient : $\alpha_\mu = \dfrac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(1-\mu)}\ 2^\mu$.

(2.2) Terminons ce paragraphe par deux remarques :

(i) on déduit des propriétés de scaling (2.b) et (2.c) l'identité :

(2.d) $\qquad \tau(1) \overset{(\text{loi})}{=} \ell_1^{-\nu}$.

Cette identité (2.d) est bien en accord avec le résultat suivant tiré du théorème 1, (ii)

(2.e) $\qquad \ell_1^{-\nu} \overset{(\text{loi})}{=} \sum_{j=1}^{k} p_j^\nu T_j$

puisque le membre de droite de (2.e) a même loi que T_j, pour j donné.

(ii) L'égalité (1.f) $\ell_1^\nu = g\ \lambda^\nu$ provient de ce que, de même qu'en (2.a), on définit la famille continue $(\lambda^x\ ;\ x \geq 0)$ au moyen de la formule :

$$\int_0^1 ds\ f(Y_s) = \alpha_\mu \int_0^\infty dx\ x^{\delta-1}\ \lambda^x f(x)$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne.

(1.f) découle alors de la définition de $Y_u = \dfrac{1}{\sqrt{g}} X_{ug}$ $\quad (u \leq 1)$.

3. <u>Démonstration des théorèmes 1 et 2</u> :

(3.1) Les assertions (ii) des théorèmes 1 et 2 découlent immédiatement des assertions (i).

(3.2) Pour prouver l'assertion (i) du théorème 1, il suffit, grâce à la propriété de scaling, de montrer que, si S est un temps exponentiel indépendant de X, de paramètre 1, on a :

$$\frac{1}{\ell_S^\nu}\,(A_i(S)\ ;\ i \le k) \overset{(\text{loi})}{=} (p_i^\nu T_i, i \le k),$$

ce qui équivaut à prouver :

$$E\left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^\nu}\right] = \exp - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \xi_i^\mu\right) \tag{3.a}$$

où $A(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i A_i(t) \qquad (\xi_i \ge 0)$.

Or, on a :

$$E\left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^\nu}\right] = E\left[\int_0^\infty du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{\ell_u^\nu}\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{s>0} \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^\nu}\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{s>0} \exp - \left(\tau_{s-} + \frac{A(\tau_{s-})}{s^\nu}\right)\left(\int_0^V du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^\nu}\right) o\ \theta_{\tau_{s-}}\right)\right]$$

$$\underset{(3.b)}{=} E\left[\int_0^\infty ds \exp - \left(\tau_s + \frac{A(\tau_s)}{s^\nu}\right)\right] \int n(de) \int_0^V du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^\nu}\right).$$

Or, on a, en posant $\tau_s^i = \int_0^{\tau_s} du\ 1_{I_i}(X_u)$:

$$E\left[\exp - (\tau_s + \frac{A(\tau_s)}{s^\nu})\right] = \prod_{i=1}^{k} E\left[\exp - \left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right)\tau_s^i\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \exp - sp_i\left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right)^\mu$$

$$= \exp - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i (s^\nu + \xi_i)^\mu\right) \equiv \exp - \varphi(s).$$

D'autre part, on a :

$$\int n(de) \int_0^V du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^\nu}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \int n_i(de) \int_0^V du \exp - \left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right) u$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right)} \int n_i(de) \left(1 - \exp - \left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right) V\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right)^{\mu - 1} = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i (s^\nu + \xi_i)^{\mu-1}\right) s^{\nu - 1} \equiv \varphi'(s).$$

On a donc finalement, d'après (3.b) :

$$E\left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^\nu}\right] = \int_0^\infty ds \exp(-\varphi(s))\varphi'(s) = \exp - \varphi(0) = \exp - \sum_{i=1}^{k} p_i \xi_i^\mu,$$

c'est-à-dire (3.a).

(3.3) Pour prouver l'assertion (i) du théorème 2, il suffit de montrer, avec les notations déjà utilisées en (3.2), l'identité suivante :

$$\text{(3.c)} \qquad E\left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu}\right] = E\left[\exp\left(- \sum_{i=1}^{k} \xi_i p_i^\nu T_i\right) \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i^\nu T_i\right)^\mu}\right].$$

Or, en reprenant les mêmes arguments que ci-dessus, il vient :

$$E\left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu}\right] = E\left[\int_0^\infty du \exp - \left(u + \frac{A(g_u)}{\ell_u^\nu}\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_s \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} du \exp - \left(u + \frac{A(\tau_{s-})}{s^\nu}\right)\right]$$

$$= \int_0^\infty ds \exp - s \sum_{i=1}^{k} p_i \left(1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right)^\mu$$

$$= \int_0^\infty ds \exp - \sum_{i=1}^{k} p_i (s^\nu + \xi_i)^\mu .$$

Introduisons maintenant les variables T_i ; il vient :

$$E\left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu}\right] = \int_0^\infty ds \prod_{i=1}^{k} E[\exp - p_i^\nu (s^\nu + \xi_i) T_i]$$

d'où l'on déduit, sans difficulté, la formule (3.c).

4. Résultats complémentaires sur les lois décrites dans les Théorèmes 1 et 2.

(4.1) Le cas brownien $\mu = 1/2$.

Dans ce cas, on déduit de la formule :

$$P(2T_i \in dt) = \frac{dt}{(2\pi t^3)^{1/2}} e^{-1/2t}$$

($2T_i$ est le premier temps d'atteinte de 1 par un mouvement brownien réel issu de 0) et des théorèmes 1 et 2 les résultats explicites suivants.

Théorème 3 : *Soit* f, *fonction borélienne, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *définie sur le simplexe* $\Sigma_k = \{(u_1, \dots, u_k) : u_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} u_i = 1\}$. *On a alors :*

$$E[f(A_i(1) \; ; \; i \leq k)] = c_k \int_{\Sigma_k} du_1 \dots du_{k-1} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i}{u_i^{3/2}}\right) \frac{f(u_1, \dots, u_k)}{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{u_i}\right)^{k/2}}$$

$$E[f(U_i \; ; \; i \leq k)] = d_k \int_{\Sigma_k} du_1 \dots du_{k-1} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i}{u_i^{3/2}}\right) \frac{f(u_1, \dots u_k)}{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^2}{u_i}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

avec $c_k = \Gamma(\frac{k}{2})/\pi^{k/2}$ *et* $d_k = \Gamma(\frac{k+1}{2})/\pi^{k/2}$.

En particulier, pour $k = 2$, *on a (en posant* $p = p_1$ *et* $q = p_2$*) :*

$$E[f(A_1(1))] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 du \, f(u) \frac{pq}{p^2(1-u)+q^2u} \frac{1}{(u(1-u))^{1/2}}$$

$$E[f(U_1)] = \frac{1}{2}\int_0^1 du\, f(u)\, \frac{pq}{(p^2(1-u)+q^2u)^{3/2}}.$$

Remarque : On retrouve bien les résultats de Paul Lévy dans le cas $p = q = 1/_2$, c'est-à-dire que $A_1(1)$ suit la loi de l'arc sinus, et U_1 la loi uniforme sur $[0,1]$. □

Nous donnons maintenant une description, de nature moins calculatoire, de la loi du vecteur $((A_i(1), i \le k)\ ;\ \ell_1^2)$.

Proposition 1 : *Soient* $\underline{x}_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *variable aléatoire distribuée uniformément sur la sphère unité de* $\mathbb{R}^k$, *et* $Z_{k/2}$ *une variable aléatoire indépendante, suivant la loi gamma de paramètre* $\frac{k}{2}$, *c'est-à-dire :*

$$P(Z_{k/2} \in dr) = r^{\frac{k}{2}-1} e^{-r}\, dr/\Gamma(\tfrac{k}{2}).$$

Alors :

1) $$((A_i(1), i \le k)\ ;\ \tfrac{1}{2}\ell_1^2) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{(p_i/x_i)^2}{\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2},\ i \le k\ ;\ \frac{2Z_{k/2}}{\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2}\right)$$

2) En conséquence :

i) $$\left[\sum_{j=1}^k p_j^2/A_j(1)\right]^{-1} \overset{(\text{loi})}{=} \left[\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2\right]^{-1}$$

et ces deux variables, à valeurs dans $[0,1]$, *suivent la loi* $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$, *c'est-à-dire :*

$$\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{k-1}{2})}\, t^{-1/2}(1-t)^{\frac{k-3}{2}}\, dt$$

ii) $$(x_i^2\ ;\ i \le k) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{p_i^2/A_i(1)}{\sum_{j=1}^k p_j^2/A_j(1)}\ ;\ i \le k\right)$$

iii) Conditionnellement à $(A_i(1) = a_i\ ;\ i \le k)$, $\frac{1}{2}\ell_1^2$ *a même loi que*

$$(2a_*)\, Z_{k/2}, \quad \text{où} \quad a_* = \left[\sum_{j=1}^k p_j^2/a_j\right]^{-1}.$$

Démonstration : 1) La première assertion découle du Théorème 1 et des deux remarques suivantes :

- d'une part, $(2T_i\ ;\ i \le k) \overset{(\text{loi})}{=} (1/_{N_i^2}\ ;\ i \le k)$

où $\underline{N}_k \overset{\text{def}}{=} (N_i \; ; \; i \le k)$ est un vecteur aléatoire constitué de k variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes ;

- d'autre part, on a : $\underline{N}_k = |\underline{N}_k| \underline{x}_k$; les variables $|\underline{N}_k| = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i^2 \right)^{1/2}$ et $\underline{x}_k$ sont indépendantes ; $\underline{x}_k$ est distribuée uniformément sur la sphère unité de $\mathbb{R}^k$, et : $|\underline{N}_k|^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2Z_{k/2}$.

2) Si l'on pose $y_i = \dfrac{p_i^2/x_i^2}{\sum_{j=1}^{k} (p_j/x_j)^2}$, il est immédiat que :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^2/y_i = \sum_{j=1}^{k} (p_j/x_j)^2 ,$$

et donc : $x_i^2 = \dfrac{p_i^2/y_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j^2/y_j}$; cette remarque entraîne les égalités en loi qui figurent en i) et ii), ainsi que iii).

3) Il reste à montrer que la variable $H = \left[\sum_{j=1}^{k} (p_j/x_j)^2 \right]^{-1}$ suit la loi $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$.

(Le fait que H prenne ses valeurs dans $[0,1]$ découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; en effet :

$$1 = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\frac{\sqrt{p_i}}{|x_i|} \right) \left(\frac{|x_i|}{\sqrt{p_i}} \right) \le H^{-1/2} (\Sigma x_i^2)^{1/2} = H^{-1/2}).$$

Remarquons que, d'après 1), $\frac{1}{2} \ell_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2Z_{k/2} H$, les variables $Z_{k/2}$ et H étant indépendantes.

Or, il est bien connu que $\frac{1}{2} \ell_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} N_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2Z_{1/2}$, où $Z_{1/2}$ suit la loi gamma de paramètre $1/_2$. En conséquence, les moments de H sont ceux d'une variable distribuée suivant $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$, d'où le résultat. □

<u>Remarques</u> : 1) On peut noter que le Théorème 1 et la Proposition 1 jouent des rôles inverses l'un de l'autre : dans le Théorème 1, c'est la division par ℓ_1^{ν} qui permet d'obtenir de façon simple la loi du vecteur $(A_i(1), i \le k)$, alors que dans la Proposition 1, on obtient la loi de ℓ_1^2, conditionnellement à $(A_i(1), i \le k)$.

2) Au passage, nous avons identifié la loi de $H = \left[\sum_{j=1}^{k} (p_i/x_j)^2\right]^{-1}$ comme étant $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$; en particulier, cette loi ne dépend pas de la probabilité $(p_i)_{i\le k}$.

Bien entendu, ce résultat peut être obtenu en dehors de toute considération brownienne, et repose essentiellement sur les faits bien connus suivants: d'une part, si $T_1, \dots, T_n$ sont n variables stables, d'indice $1/2$, indépendantes, $T = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 T_i$ est également stable d'indice $1/2$, et, d'autre part, $2T \overset{(\text{loi})}{=} 1/N^2$, où N est une variable gaussienne, centrée, réduite.

(4.2) Transformées de Laplace.

Considérons à nouveau l'énoncé du théorème 1. L'idée de diviser le vecteur $(A_i(u) \; ; \; i \le k)$ par ℓ_u^{ν}, de façon à obtenir un résultat simple, nous est venue tout à la fin de notre étude. Auparavant, nous avions simplement procédé par transformation de Laplace, et obtenu les résultats suivants, qui conservent néanmoins leur intérêt.

Théorème 4 : *Soient* $\alpha > 0$ *et* $\xi_j \ge 0$ $(1 \le j \le k)$. *Alors :*

(4.a)
$$E\left[\int_0^{\infty} dt \exp - \left(\alpha t + \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(t)\right)\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}}$$

(4.b)
$$E\left[\int_0^{\infty} dt \exp - \left(\alpha t + \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(g_t)\right)\right] = \frac{\alpha^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}} .$$

Faisons quelques commentaires, avant de démontrer le théorème 4 :

a) Prenons, dans la formule (4.b), $\xi_j = \xi$ pour tout $j \le k$. On obtient alors, en choisissant de plus $\alpha = 1$:

$$E\left[\int_0^{\infty} dt \exp - (t + \xi g_t)\right] = (1+\xi)^{-\mu}.$$

Si l'on note $g_\mu \equiv g(1) = \sup\{s \le 1 : X_s = 0\}$, et S une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante de g_μ, on peut réécrire, à l'aide de la propriété de scaling, l'identité précédente sous la forme :

(4.c) $$E[\exp - \xi S g_\mu] = (1+\xi)^{-\mu} = E[\exp - \xi \gamma_\mu],$$

où $P(\gamma_\mu \in dt) = \frac{dt}{\Gamma(\mu)} e^{-t} t^{\mu-1}$.

Or, d'après les résultats classiques sur l'algèbre des variables béta et gamma, on a :

(4.d) $$\gamma_\mu \overset{(\text{loi})}{=} Z_{\mu,1-\mu} \cdot S$$

où, dans le membre de droite, $Z_{\mu,1-\mu}$ est une variable $\beta(\mu,1-\mu)$, c'est-à-dire :

$$P(Z_{\mu,1-\mu} \in dt) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} dt\ t^{\mu-1}(1-t)^{-\mu}$$

indépendante de S.

On déduit maintenant des relations (4.c) et (4.d) l'identité :

(4.e) $$g_\mu \overset{(\text{loi})}{=} Z_{\mu,1-\mu}$$

(le cas particulier $\mu = 1/_2$ donne bien sûr le résultat (1.a) pour g, dû à Paul Lévy ; le résultat (4.e) dans le cas général est dû à Dynkin [18]).

b) La loi de g_μ ayant été déterminée, nous allons appliquer la propriété de scaling pour transformer les membres de gauche de (4.a) et (4.b).

i) Tout d'abord, comme $(A_j(t)\ ;\ j \le k) \overset{(\text{loi})}{=} (tA_j(1)\ ;\ j \le k)$, on a :

(4.a') $$E\left[\left[\alpha + \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(1)\right]^{-1}\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}}$$

ii) D'autre part, on a, pour t fixé :

$$(A_j(g_t), j \le k) \overset{(\text{loi})}{=} t g_\mu (U_j\ ;\ j \le k)$$

la variable g_μ étant indépendante du vecteur $(U_j, j \le k)$.

On déduit alors de (4.c) l'identité :

$$E\left[\exp - \left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j U_j\right)\gamma_\mu\right] = \left(\sum_{j=1}^{k} p_j(1+\xi_j)^{\mu}\right)^{-1},$$

la variable γ_μ étant indépendante du vecteur $(U_j, j \le k)$.

En utilisant à nouveau (4.c), on remarque que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est égal à :

$$E\left[\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \xi_j U_j\right)^{-\mu}\right]$$

et, finalement, en remplaçant ξ_j par ξ_j/α, on obtient :

$$(4.b') \qquad E\left[\left(\alpha + \sum_{j=1}^{k} \xi_j U_j\right)^{-\mu}\right] = \left(\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}\right)^{-1}.$$

c) Lorsque l'on compare le théorème 1, resp : 2, à l'identité (4.a'), resp : (4.b'), la question suivante se pose naturellement : l'identité (4.a') (par exemple) détermine uniquement - même si l'on considère seulement $\alpha = 1$ - la loi du vecteur $(A_j(1), j \le k)$.

Peut-on montrer directement (et simplement...) que cette loi est celle de

$$\left(\frac{p_j^{\nu} T_j}{\sum_{i=1}^{k} p_i^{\nu} T_i} \; ; \; j \le k\right)$$

comme cela est démontré dans le théorème 1 ?

Nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

En effet, en posant $a_j = p_j^{\nu}$ et $b_j = p_j^{\nu}(1+\xi_j)$, cette question se ramène aisément à la démonstration de l'identité :

$$(4.f) \qquad E\left[\frac{\sum_{j=1}^{k} a_j T_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j T_j}\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j b_j^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}}$$

identité valable pour tout k-uple $(a_j, b_j)_{j\le k}$ de couples (a_j, b_j) tels que : $0 \le a_j \le b_j$.

<u>Remarque</u> : A priori, on ne connaissait la validité de l'identité (4.f) que pour des réels positifs $a_j (\equiv p_j^{\nu})$ satisfaisant la condition :

$\sum_{j=1}^{k} a_j^{\mu} = 1$, mais, quitte à remplacer a_j par a_j/α et b_j par b_j/α, où

$\alpha^{\mu} = \sum_{j=1}^{k} a_j^{\mu}$, on voit que l'égalité (4.f) est toujours valable sous la seule

condition : $0 \le a_j \le b_j$.

Démonstration de (4.f) : Posons

$$T_{(a)} = \sum_{j=1}^{k} a_j T_j \ , \ T_{(b)} = \sum_{j=1}^{k} b_j T_j,$$

$\varphi(s,t)=E[\exp-(sT_{(a)}+tT_{(b)})]$; $\psi(t) = -\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \varphi(s,t) = E[T_{(a)}\exp-tT_{(b)}]$.

On a alors : $E\left[\frac{T_{(a)}}{T_{(b)}}\right] = \int_0^{\infty} dt\ \psi(t).$

Or, comme :

$$\varphi(s,t) = \exp - \sum_{j=1}^{k} (sa_j + tb_j)^{\mu} \ ,$$

on a :

$$\psi(t) = \exp\left(-t^{\mu} \sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}\right) \sum_{j=1}^{k} \mu a_j t^{\mu-1} b_j^{\mu-1}$$

$$= \mu t^{\mu-1}\left\{\exp - t^{\mu}\left(\sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}\right)\right\}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_j^{\mu-1}\right).$$

On en déduit :

$$E\left[\frac{T_{(a)}}{T_{(b)}}\right] = \int_0^{\infty} dt\ \psi(t) = \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j b_j^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}}, \text{ c'est-à-dire (4.f).} \qquad \square$$

Nous donnons maintenant une démonstration du théorème 4, indépendante des résultats obtenus dans le sous-paragraphe c) ci-dessus. Celle-ci repose uniquement sur le lemme suivant (classique en théorie des excursions), dont la démonstration utilise les arguments du paragraphe 3 (aussi, nous ne donnons pas les détails de cette démonstration).

Lemme : *Soit* $(X_t)_{t\ge0}$ *processus de Markov à trajectoires continues, admettant* 0 *pour point régulier pour lui-même, et* n(de) *une détermination de la* *mesure caractéristique des excursions de* X *hors de* 0.

Notons $g_t = \sup\{s \le t : X_s = 0\}$.

Soit $(A_t, t \ge 0)$ *fonctionnelle additive continue, croissante, de* X, *telle que, p.s.,* dA_s *ne charge pas* $\{s : X_s = 0\}$. *On a alors les formules :*

$$(4.g) \qquad E\left[\int_0^\infty dt \exp - (\alpha t + A_t)\right] = \frac{\displaystyle\int n(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha t + A_t)}{\displaystyle\int n(de)\ (1 - \exp - (\alpha V + A_V))}$$

$$(4.h) \qquad E\left[\int_0^\infty dt \exp - (\alpha t + A_{g_t})\right] = \frac{\displaystyle\int n(de)\ (1 - e^{\alpha V})}{\displaystyle\int n(de) \left(1 - e^{-\alpha V - A_V}\right)}$$

où V *désigne la durée de vie de l'excursion générique* $(e(u), u \le V)$.

Pour démontrer le théorème 4, il suffit d'appliquer le lemme à la fonctionnelle $A_t = \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(t)$. Alors, si l'on note n_μ une détermination, fixée une fois pour toutes, de la mesure des excursions hors de 0 du processus de Bessel de dimension $\delta = 2(1-\mu)$, on a, par exemple :

$$\begin{aligned}
\int n(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha t + A_t) &= \sum_{j=1}^{k} p_j \int n_\mu(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha + \xi_j)t \\
&= \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{1}{(\alpha+\xi_j)} \int n_\mu(de) \left(1-e^{-(\alpha+\xi_j)V}\right) \\
&= c_\mu \sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu-1},
\end{aligned}$$

pour une certaine constante c_μ.

Les formules (4.a) et (4.b) découlent alors aisément de ce type de calculs.

(4.3) ***Un résultat asymptotique.***

Nous considérons maintenant uniquement le processus de Walsh $W_k(\mu\ ;\ (p_i)_{i\le k})$ et le pont de Walsh correspondant, lorsque la probabilité $(p_i\ ;\ i \le k)$ est uniforme, c'est-à-dire : $p_i \equiv \frac{1}{k}$ $(i \le k)$, et nous déduisons des Théorèmes 1 et 2 le résultat asymptotique suivant, lorsque $k \longrightarrow \infty$.

<u>Théorème 5</u> : *Soit* p *entier fixé, et* $\{(T_i \ ; \ i \le p) \ ; \ T_*\}$ *un ensemble de* (p+1) *variables positives stables, d'indice* μ, *indépendantes. Alors :*

(i) $\{(k^\nu A_i(1) \ ; \ i \le p) \ ; \ \ell_1^\nu\} \xrightarrow[k\to\infty]{(\text{loi})} \left\{\frac{T_i}{T_*} \ (i \le p) \ ; \ \frac{1}{T_*}\right\}$

(ii) pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continue, bornée,*

$$E\left[f((k^\nu U_i(1) \ ; \ i \le p) \ ; \ \lambda_1^\nu)\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} E\left[f\left((\frac{T_i}{T_*} \ ; \ i \le p) \ ; \ \frac{1}{T_*}\right) \frac{\Gamma(1+\mu)}{T_*^\mu}\right]$$

<u>Démonstration</u> : Ces deux assertions découlent des Théorèmes 1 et 2 lorsque l'on a remarqué que le vecteur :

$$\left[(T_i \ ; \ i \le p) \ ; \ \frac{1}{k^\nu}\left[\sum_{j=1}^{k} T_j\right]\right] \tag{4.i}$$

converge en loi vers : $((T_i \ ; \ i \le p) \ ; \ T_*)$;

en d'autres termes : lorsque $k \longrightarrow \infty$, la variable : $\frac{1}{k^\nu}\left[\sum_{j=1}^{k} T_j\right]$ est asymptotiquement indépendante de $(T_i \ ; \ i \le p)$, résultat qui découle, par exemple, de la convergence de la transformée de Laplace du vecteur (4.i) vers le produit des transformées de Laplace des (p+1) variables $(T_i)_{i\le p}$ et T_*.

<u>Remarque</u> : Le théorème 5 est à rapprocher du lemme de Poincaré selon lequel, si $\underline{x}_k = (x_k^{(1)},\dots,x_k^{(k)})$ est une variable uniformément distribuée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^k$, alors pour $p \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\sqrt{k}(x_k^{(1)},\dots,x_k^{(p)}) \xrightarrow[(k\to\infty)]{(\text{loi})} (N_1,\dots,N_p),$$

les variables N_i, $i \le p$, étant gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

A cet effet, remarquons que l'on déduit du Théorème 1 et de la loi des grands nombres que :

$$\frac{\ell_1^\nu}{k^{\nu+1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{A_i(1)} \overset{(\text{loi})}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{T_i} \xrightarrow{(P)} E(\frac{1}{T_1}) = \Gamma(\nu+1).$$

En conséquence, on peut réécrire l'assertion (i) du Théorème 5 sous la forme :

$$(4.j) \qquad \left\{ \left(\frac{1/k^{\nu} A_i(1)}{\sum_{j=1}^{k} 1/k^{\nu} A_j(1)} \ , \ i \le p \right) \ ; \ \frac{1}{k^{\nu+1}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{A_j(1)} \right\}$$

converge en loi, lorsque $k \longrightarrow \infty$, vers :

$$(4.k) \qquad \left\{ \left(\frac{1}{T_i \Gamma(\nu+1)} \ ; \ i \le p \right) \ ; \ T_* \ \Gamma(\nu+1) \right\}.$$

Or, d'après la proposition 1, dans le cas brownien $(\nu = 2)$, le terme qui figure à gauche en (4.j) a même loi que :

$$k\left[(x_k^{(1)})^2, \dots, (x_k^{(p)})^2 \right]$$

alors que le terme correspondant en (4.k) a même loi que :

$$(N_i^2, i \le p).$$

La relation avec le lemme de Poincaré est donc établie.

REFERENCES

[1] J.K. Brooks, R.V. Chacon : Diffusions as a limit of stretched Brownian motions. Adv. in Maths, vol. 49, n° 2, **109-122** (1983).

[2] J. Franchi : Produit semi-direct de diffusions réelles et lois asymptotiques. A paraître au Journal of App. Proba. (1989)

[3] J.M. Harrison, L.A. Shepp : On skew brownian motion. Ann. Proba. 9, 309-313 (1981).

[4] K. Itô, H.P. Mc Kean : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[5] I. Karatzas, S.E. Shreve : Brownian motion and stochastic calculus. Springer (1987).

[6] J.F. Le Gall : One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process.
In : Stochastic Analysis and Applications
(eds. A. Truman, D. Williams).
Lect. Notes in Maths 1095. Springer (1984).

[7] J.W. Pitman, M. Yor : Asymptotic laws of planar Brownian motion. Ann. Probas. 14, **733-779** (1986).

[8] L.C.G. Rogers, D. Williams : Diffusions, Markov processes and Martingales. Vol. 2 : Itô Calculus. J. Wiley (1987).

[9] W. Rosenkrantz : Limit theorems for solutions to a class of stochastic differential equations. Indiana Math. J. 24, 613-625 (1975).

[10] J.B. Walsh : A diffusion with discontinuous local time. Astérisque 52-53, **37-45** (1978).

[11a] P. Lévy : Sur un problème de M. Marcinkiewicz. C.R.A.S. 208 (1939), p. **318-321**. Errata p. **776**.

[11b] P. Lévy : Sur certains processus stochastiques homogènes. Compositio Math., t. 7, 1939, p. 283-339.

[12] D. Williams : Markov properties of Brownian local time. Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1035-1036 (1969).

[13] M. Kac : On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability, 189-215 (1951), University of California Press.

[14] M.T. Barlow, J.W. Pitman, M. Yor : On Walsh's Brownian Motions. Dans ce volume*.

[15] M.T. Barlow, J.W. Pitman, M. Yor : Some extensions of the arc sine law. Technical Report n° 189. Department of Statistics, U.C. Berkeley (1989).

[16] J. Kent : Some probabilistic properties of Bessel functions. Ann. Prob. 6, 760-770 (1978).

[17] S.A. Molchanov, E. Ostrovski : Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes. Theory of Proba. and its App., vol. XIV, n° 1, 128-131 (1969).

[18] E.B. Dynkin : Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectations. Selected Transl. in Math. Stat. and Probability, vol. 1, 1961, IMS-AMS, p. 171-189 (1961).

*In Department of Statistics, University of California, Berkeley Technical Report No. 184.

TECHNICAL REPORTS

Statistics Department

University of California, Berkeley

1. BREIMAN, L. and FREEDMAN, D. (Nov. 1981, revised Feb. 1982). How many variables should be entered in a regression equation? Jour. Amer. Statist. Assoc., March 1983, 78, No. 381, 131-136.

2. BRILLINGER, D. R. (Jan. 1982). Some contrasting examples of the time and frequency domain approaches to time series analysis. Time Series Methods in Hydrosciences, (A. H. El-Shaarawi and S. R. Esterby, eds.) Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, 1982, pp. 1-15.

3. DOKSUM, K. A. (Jan. 1982). On the performance of estimates in proportional hazard and log-linear models. Survival Analysis, (John Crowley and Richard A. Johnson, eds.) IMS Lecture Notes - Monograph Series, (Shanti S. Gupta, series ed.) 1982, 74-84.

4. BICKEL, P. J. and BREIMAN, L. (Feb. 1982). Sums of functions of nearest neighbor distances, moment bounds, limit theorems and a goodness of fit test. Ann. Prob., Feb. 1982, 11. No. 1, 185-214.

5. BRILLINGER, D. R. and TUKEY, J. W. (March 1982). Spectrum estimation and system identification relying on a Fourier transform. The Collected Works of J. W. Tukey, vol. 2, Wadsworth, 1985, 1001-1141.

6. BERAN, R. (May 1982). Jackknife approximation to bootstrap estimates. Ann. Statist., March 1984, 12 No. 1, 101-118.

7. BICKEL, P. J. and FREEDMAN, D. A. (June 1982). Bootstrapping regression models with many parameters. Lehmann Festschrift, (P. J. Bickel, K. Doksum and J. L. Hodges, Jr., eds.) Wadsworth Press, Belmont, 1983, 28-48.

8. BICKEL, P. J. and COLLINS, J. (March 1982). Minimizing Fisher information over mixtures of distributions. Sankhyā, 1983, 45, Series A, Pt. 1, 1-19.

9. BREIMAN, L. and FRIEDMAN, J. (July 1982). Estimating optimal transformations for multiple regression and correlation.

10. FREEDMAN, D. A. and PETERS, S. (July 1982, revised Aug. 1983). Bootstrapping a regression equation: some empirical results. JASA, 1984, 79, 97-106.

11. EATON, M. L. and FREEDMAN, D. A. (Sept. 1982). A remark on adjusting for covariates in multiple regression.

12. BICKEL, P. J. (April 1982). Minimax estimation of the mean of a mean of a normal distribution subject to doing well at a point. Recent Advances in Statistics, Academic Press, 1983.

14. FREEDMAN, D. A., ROTHENBERG, T. and SUTCH, R. (Oct. 1982). A review of a residential energy end use model.

15. BRILLINGER, D. and PREISLER, H. (Nov. 1982). Maximum likelihood estimation in a latent variable problem. Studies in Econometrics, Time Series, and Multivariate Statistics, (eds. S. Karlin, T. Amemiya, L. A. Goodman). Academic Press, New York, 1983, pp. 31-65.

16. BICKEL, P. J. (Nov. 1982). Robust regression based on infinitesimal neighborhoods. Ann. Statist., Dec. 1984, 12, 1349-1368.

17. DRAPER, D. C. (Feb. 1983). Rank-based robust analysis of linear models. I. Exposition and review. Statistical Science, 1988, Vol.3 No. 2 239-271.

18. DRAPER, D. C. (Feb 1983). Rank-based robust inference in regression models with several observations per cell.

19. FREEDMAN, D. A. and FIENBERG, S. (Feb. 1983, revised April 1983). Statistics and the scientific method, Comments on and reactions to Freedman, A rejoinder to Fienberg's comments. Springer New York 1985 Cohort Analysis in Social Research, (W. M. Mason and S. E. Fienberg, eds.).

20. FREEDMAN, D. A. and PETERS, S. C. (March 1983, revised Jan. 1984). Using the bootstrap to evaluate forecasting equations. J. of Forecasting. 1985, Vol. 4, 251-262.

21. FREEDMAN, D. A. and PETERS, S. C. (March 1983, revised Aug. 1983). Bootstrapping an econometric model: some empirical results. JBES, 1985, 2, 150-158.

22. FREEDMAN, D. A. (March 1983). Structural-equation models: a case study.

23. DAGGETT, R. S. and FREEDMAN, D. (April 1983, revised Sept. 1983). Econometrics and the law: a case study in the proof of antitrust damages. Proc. of the Berkeley Conference, in honor of Jerzy Neyman and Jack Kiefer. Vol I pp. 123-172. (L. Le Cam, R. Olshen eds.) Wadsworth, 1985.

24. DOKSUM, K. and YANDELL, B. (April 1983). Tests for exponentiality. Handbook of Statistics, (P. R. Krishnaiah and P. K. Sen, eds.) 4, 1984, 579-611.

25. FREEDMAN, D. A. (May 1983). Comments on a paper by Markus.

26. FREEDMAN, D. (Oct. 1983, revised March 1984). On bootstrapping two-stage least-squares estimates in stationary linear models. Ann. Statist., 1984, 12, 827-842.

27. DOKSUM, K. A. (Dec. 1983). An extension of partial likelihood methods for proportional hazard models to general transformation models. Ann. Statist., 1987, 15, 325-345.

28. BICKEL, P. J., GOETZE, F. and VAN ZWET, W. R. (Jan. 1984). A simple analysis of third order efficiency of estimate Proc. of the Neyman-Kiefer Conference, (L. Le Cam, ed.) Wadsworth, 1985.

29. BICKEL, P. J. and FREEDMAN, D. A. Asymptotic normality and the bootstrap in stratified sampling. Ann. Statist. 12 470-482.

30. FREEDMAN, D. A. (Jan. 1984). The mean vs. the median: a case study in 4-R Act litigation. JBES. 1985 Vol 3 pp. 1-13.

31. STONE, C. J. (Feb. 1984). An asymptotically optimal window selection rule for kernel density estimates. Ann. Statist., Dec. 1984, 12, 1285-1297.

32. BREIMAN, L. (May 1984). Nail finders, edifices, and Oz.

33. STONE, C. J. (Oct. 1984). Additive regression and other nonparametric models. Ann. Statist., 1985, 13, 689-705.

34. STONE, C. J. (June 1984). An asymptotically optimal histogram selection rule. Proc. of the Berkeley Conf. in Honor of Jerzy Neyman and Jack Kiefer (L. Le Cam and R. A. Olshen, eds.), II, 513-520.

35. FREEDMAN, D. A. and NAVIDI, W. C. (Sept. 1984, revised Jan. 1985). Regression models for adjusting the 1980 Census. Statistical Science. Feb 1986, Vol. 1, No. 1, 3-39.

36. FREEDMAN, D. A. (Sept. 1984, revised Nov. 1984). De Finetti's theorem in continuous time.

37. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D. (Oct. 1984). An elementary proof of Stirling's formula. Amer. Math Monthly. Feb 1986, Vol. 93, No. 2, 123-125.

38. LE CAM, L. (Nov. 1984). Sur l'approximation de familles de mesures par des familles Gaussiennes. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1985, 21, 225-287.

39. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D. A. (Nov. 1984). A note on weak star uniformities.

40. BREIMAN, L. and IHAKA, R. (Dec. 1984). Nonlinear discriminant analysis via SCALING and ACE.

41. STONE, C. J. (Jan. 1985). The dimensionality reduction principle for generalized additive models.

42. LE CAM, L. (Jan. 1985). On the normal approximation for sums of independent variables.

43. BICKEL, P. J. and YAHAV, J. A. (1985). On estimating the number of unseen species: how many executions were there?

44. BRILLINGER, D. R. (1985). The natural variability of vital rates and associated statistics. Biometrics, to appear.

45. BRILLINGER, D. R. (1985). Fourier inference: some methods for the analysis of array and nonGaussian series data. Water Resources Bulletin, 1985, 21, 743-756.

46. BREIMAN, L. and STONE, C. J. (1985). Broad spectrum estimates and confidence intervals for tail quantiles.

47. DABROWSKA, D. M. and DOKSUM, K. A. (1985, revised March 1987). Partial likelihood in transformation models with censored data. Scandinavian J. Statist., 1988, 15, 1-23.

48. HAYCOCK, K. A. and BRILLINGER, D. R. (November 1985). LIBDRB: A subroutine library for elementary time series analysis.

49. BRILLINGER, D. R. (October 1985). Fitting cosines: some procedures and some physical examples. Joshi Festschrift, 1986. D. Reidel.

50. BRILLINGER, D. R. (November 1985). What do seismology and neurophysiology have in common? - Statistics! Comptes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada. January, 1986.

51. COX, D. D. and O'SULLIVAN, F. (October 1985). Analysis of penalized likelihood-type estimators with application to generalized smoothing in Sobolev Spaces.

52. O'SULLIVAN, F. (November 1985). A practical perspective on ill-posed inverse problems: A review with some new developments. To appear in Journal of Statistical Science.

53. LE CAM, L. and YANG, G. L. (November 1985, revised March 1987). On the preservation of local asymptotic normality under information loss.

54. BLACKWELL, D. (November 1985). Approximate normality of large products.

55. FREEDMAN, D. A. (June 1987). As others see us: A case study in path analysis. Journal of Educational Statistics. **12**, 101-128.

56. LE CAM, L. and YANG, G. L. (January 1986). Replaced by No. 68.

57. LE CAM, L. (February 1986). On the Bernstein - von Mises theorem.

58. O'SULLIVAN, F. (January 1986). Estimation of Densities and Hazards by the Method of Penalized likelihood.

59. ALDOUS, D. and DIACONIS, P. (February 1986). Strong Uniform Times and Finite Random Walks.

60. ALDOUS, D. (March 1986). On the Markov Chain simulation Method for Uniform Combinatorial Distributions and Simulated Annealing.

61. CHENG, C-S. (April 1986). An Optimization Problem with Applications to Optimal Design Theory.

62. CHENG, C-S., MAJUMDAR, D., STUFKEN, J. & TURE, T. E. (May 1986, revised Jan 1987). Optimal step type design for comparing test treatments with a control.

63. CHENG, C-S. (May 1986, revised Jan. 1987). An Application of the Kiefer-Wolfowitz Equivalence Theorem.

64. O'SULLIVAN, F. (May 1986). Nonparametric Estimation in the Cox Proportional Hazards Model.

65. ALDOUS, D. (JUNE 1986). Finite-Time Implications of Relaxation Times for Stochastically Monotone Processes.

66. PITMAN, J. (JULY 1986, revised November 1986). Stationary Excursions.

67. DABROWSKA, D. and DOKSUM, K. (July 1986, revised November 1986). Estimates and confidence intervals for median and mean life in the proportional hazard model with censored data. Biometrika, 1987, **74**, 799-808.

68. LE CAM, L. and YANG, G.L. (July 1986). Distinguished Statistics, Loss of information and a theorem of Robert B. Davies (Fourth edition).

69. STONE, C.J. (July 1986). Asymptotic properties of logspline density estimation.

71. BICKEL, P.J. and YAHAV, J.A. (July 1986). Richardson Extrapolation and the Bootstrap.

72. LEHMANN, E.L. (July 1986). Statistics - an overview.

73. STONE, C.J. (August 1986). A nonparametric framework for statistical modelling.

74. BIANE, PH. and YOR, M. (August 1986). A relation between Lévy's stochastic area formula, Legendre polynomial, and some continued fractions of Gauss.

75. LEHMANN, E.L. (August 1986, revised July 1987). Comparing Location Experiments.

76. O'SULLIVAN, F. (September 1986). Relative risk estimation.

77. O'SULLIVAN, F. (September 1986). Deconvolution of episodic hormone data.

78. PITMAN, J. & YOR, M. (September 1987). Further asymptotic laws of planar Brownian motion.

79. FREEDMAN, D.A. & ZEISEL, H. (November 1986). From mouse to man: The quantitative assessment of cancer risks. To appear in Statistical Science.

80. BRILLINGER, D.R. (October 1986). Maximum likelihood analysis of spike trains of interacting nerve cells.

81. DABROWSKA, D.M. (November 1986). Nonparametric regression with censored survival time data.

82. DOKSUM, K.J. and LO, A.Y. (Nov 1986, revised Aug 1988). Consistent and robust Bayes Procedures for Location based on Partial Information.

83. DABROWSKA, D.M., DOKSUM, K.A. and MIURA, R. (November 1986). Rank estimates in a class of semiparametric two-sample models.

84. BRILLINGER, D. (December 1986). Some statistical methods for random process data from seismology and neurophysiology.

85. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D. (December 1986). A dozen de Finetti-style results in search of a theory. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1987, 23, 397-423.

86. DABROWSKA, D.M. (January 1987). Uniform consistency of nearest neighbour and kernel conditional Kaplan - Meier estimates.

87. FREEDMAN, D.A., NAVIDI, W. and PETERS, S.C. (February 1987). On the impact of variable selection in fitting regression equations.

88. ALDOUS, D. (February 1987, revised April 1987). Hashing with linear probing, under non-uniform probabilities.

89. DABROWSKA, D.M. and DOKSUM, K.A. (March 1987, revised January 1988). Estimating and testing in a two sample generalized odds rate model. J. Amer. Statist. Assoc., 1988, 83, 744-749.

90. DABROWSKA, D.M. (March 1987). Rank tests for matched pair experiments with censored data.

91. DIACONIS, P and FREEDMAN, D.A. (April 1988). Conditional limit theorems for exponential families and finite versions of de Finetti's theorem. To appear in the Journal of Applied Probability.

92. DABROWSKA, D.M. (April 1987, revised September 1987). Kaplan-Meier estimate on the plane.

92a. ALDOUS, D. (April 1987). The Harmonic mean formula for probabilities of Unions: Applications to sparse random graphs.

93. DABROWSKA, D.M. (June 1987, revised Feb 1988). Nonparametric quantile regression with censored data.

94. DONOHO, D.L. & STARK, P.B. (June 1987). Uncertainty principles and signal recovery.

95. CANCELLED

96. BRILLINGER, D.R. (June 1987). Some examples of the statistical analysis of seismological data. To appear in Proceedings, Centennial Anniversary Symposium, Seismographic Stations, University of California, Berkeley.

97. FREEDMAN, D.A. and NAVIDI, W. (June 1987). On the multi-stage model for carcinogenesis. To appear in Environmental Health Perspectives.

98. O'SULLIVAN, F. and WONG, T. (June 1987). Determining a function diffusion coefficient in the heat equation.

99. O'SULLIVAN, F. (June 1987). Constrained non-linear regularization with application to some system identification problems.

100. LE CAM, L. (July 1987, revised Nov 1987). On the standard asymptotic confidence ellipsoids of Wald.

101. DONOHO, D.L. and LIU, R.C. (July 1987). Pathologies of some minimum distance estimators. Annals of Statistics, June, 1988.

102. BRILLINGER, D.R., DOWNING, K.H. and GLAESER, R.M. (July 1987). Some statistical aspects of low-dose electron imaging of crystals.

103. LE CAM, L. (August 1987). Harald Cramér and sums of independent random variables.

104. DONOHO, A.W., DONOHO, D.L. and GASKO, M. (August 1987). Macspin: Dynamic graphics on a desktop computer. IEEE Computer Graphics and applications, June, 1988.

105. DONOHO, D.L. and LIU, R.C. (August 1987). On minimax estimation of linear functionals.

106. DABROWSKA, D.M. (August 1987). Kaplan-Meier estimate on the plane: weak convergence, LIL and the bootstrap.

107. CHENG, C-S. (Aug 1987, revised Oct 1988). Some orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorials.

108. CHENG, C-S. and JACROUX, M. (August 1987). On the construction of trend-free run orders of two-level factorial designs.

109. KLASS, M.J. (August 1987). Maximizing $E \max_{1 \le k \le n} S_k^+ / ES_n^+$: A prophet inequality for sums of I.I.D. mean zero variates.

110. DONOHO, D.L. and LIU, R.C. (August 1987). The "automatic" robustness of minimum distance functionals. Annals of Statistics, June, 1988.

111. BICKEL, P.J. and GHOSH, J.K. (August 1987, revised June 1988). A decomposition for the likelihood ratio statistic and the Bartlett correction — a Bayesian argument.

112. BURDZY, K., PITMAN, J.W. and YOR, M. (September 1987). Some asymptotic laws for crossings and excursions.

113. ADHIKARI, A. and PITMAN, J. (September 1987). The shortest planar arc of width 1.

114. RITOV, Y. (September 1987). Estimation in a linear regression model with censored data.

115. BICKEL, P.J. and RITOV, Y. (Sept. 1987, revised Aug 1988). Large sample theory of estimation in biased sampling regression models I.

116. RITOV, Y. and BICKEL, P.J. (Sept.1987, revised Aug. 1988). Achieving information bounds in non and semiparametric models.

117. RITOV, Y. (October 1987). On the convergence of a maximal correlation algorithm with alternating projections.

118. ALDOUS, D.J. (October 1987). Meeting times for independent Markov chains.

119. HESSE, C.H. (October 1987). An asymptotic expansion for the mean of the passage-time distribution of integrated Brownian Motion.

120. DONOHO, D. and LIU, R. (Oct. 1987, revised Mar. 1988, Oct. 1988). Geometrizing rates of convergence, II.

121. BRILLINGER, D.R. (October 1987). Estimating the chances of large earthquakes by radiocarbon dating and statistical modelling. To appear in Statistics a Guide to the Unknown.

122. ALDOUS, D., FLANNERY, B. and PALACIOS, J.L. (November 1987). Two applications of urn processes: The fringe analysis of search trees and the simulation of quasi-stationary distributions of Markov chains.

123. DONOHO, D.L., MACGIBBON, B. and LIU, R.C. (Nov.1987, revised July 1988). Minimax risk for hyperrectangles.

124. ALDOUS, D. (November 1987). Stopping times and tightness II.

125. HESSE, C.H. (November 1987). The present state of a stochastic model for sedimentation.

126. DALANG, R.C. (December 1987, revised June 1988). Optimal stopping of two-parameter processes on nonstandard probability spaces.

127. Same as No. 133.

128. DONOHO, D. and GASKO, M. (December 1987). Multivariate generalizations of the median and trimmed mean II.

129. SMITH, D.L. (December 1987). Exponential bounds in Vapnik-Červonenkis classes of index 1.

130. STONE, C.J. (Nov.1987, revised Sept. 1988). Uniform error bounds involving logspline models.

131. Same as No. 140

132. HESSE, C.H. (December 1987). A Bahadur - Type representation for empirical quantiles of a large class of stationary, possibly infinite - variance, linear processes

133. DONOHO, D.L. and GASKO, M. (December 1987). Multivariate generalizations of the median and trimmed mean, I.

134. DUBINS, L.E. and SCHWARZ, G. (December 1987). A sharp inequality for martingales and stopping-times.

135. FREEDMAN, D.A. and NAVIDI, W. (December 1987). On the risk of lung cancer for ex-smokers.

136. LE CAM, L. (January 1988). On some stochastic models of the effects of radiation on cell survival.

137. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D.A. (April 1988). On the uniform consistency of Bayes estimates for multinomial probabilities.

137a. DONOHO, D.L. and LIU, R.C. (1987). Geometrizing rates of convergence, I.

138. DONOHO, D.L. and LIU, R.C. (January 1988). Geometrizing rates of convergence, III.

139. BERAN, R. (January 1988). Refining simultaneous confidence sets.

140. HESSE, C.H. (December 1987). Numerical and statistical aspects of neural networks.

141. BRILLINGER, D.R. (January 1988). Two reports on trend analysis: a) An Elementary Trend Analysis of Rio Negro Levels at Manaus, 1903-1985 b) Consistent Detection of a Monotonic Trend Superposed on a Stationary Time Series

142. DONOHO, D.L. (Jan. 1985, revised Jan. 1988). One-sided inference about functionals of a density.

143. DALANG, R.C. (Feb. 1988, revised Nov. 1988). Randomization in the two-armed bandit problem.

144. DABROWSKA, D.M., DOKSUM, K.A. and SONG, J.K. (February 1988). Graphical comparisons of cumulative hazards for two populations.

145. ALDOUS, D.J. (February 1988). Lower bounds for covering times for reversible Markov Chains and random walks on graphs.

146. BICKEL, P.J. and RITOV, Y. (Feb.1988, revised August 1988). Estimating integrated squared density derivatives.

147. STARK, P.B. (March 1988). Strict bounds and applications.

148. DONOHO, D.L. and STARK, P.B. (March 1988). Rearrangements and smoothing.

149. NOLAN, D. (March 1988). Asymptotics for a multivariate location estimator.

150. SEILLIER, F. (March 1988). Sequential probability forecasts and the probability integral transform.

151. NOLAN, D. (March 1988). Limit theorems for a random convex set.

152. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D.A. (April 1988). On a theorem of Kuchler and Lauritzen.

153. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D.A. (April 1988). On the problem of types.

154. DOKSUM, K.A. (May 1988). On the correspondence between models in binary regression analysis and survival analysis.

155. LEHMANN, E.L. (May 1988). Jerzy Neyman, 1894-1981.

156. ALDOUS, D.J. (May 1988). Stein's method in a two-dimensional coverage problem.

157. FAN, J. (June 1988). On the optimal rates of convergence for nonparametric deconvolution problem.

158. DABROWSKA, D. (June 1988). Signed-rank tests for censored matched pairs.

159. BERAN, R.J. and MILLAR, P.W. (June 1988). Multivariate symmetry models.

160. BERAN, R.J. and MILLAR, P.W. (June 1988). Tests of fit for logistic models.

161. BREIMAN, L. and PETERS, S. (June 1988). Comparing automatic bivariate smoothers (A public service enterprise).

162. FAN, J. (June 1988). Optimal global rates of convergence for nonparametric deconvolution problem.

163. DIACONIS, P. and FREEDMAN, D.A. (June 1988). A singular measure which is locally uniform. (Revised by Tech Report No. 180).

164. BICKEL, P.J. and KRIEGER, A.M. (July 1988). Confidence bands for a distribution function using the bootstrap.

165. HESSE, C.H. (July 1988). New methods in the analysis of economic time series I.

166. FAN, JIANQING (July 1988). Nonparametric estimation of quadratic functionals in Gaussian white noise.

167. BREIMAN, L., STONE, C.J. and KOOPERBERG, C. (August 1988). Confidence bounds for extreme quantiles.

168. LE CAM, L. (August 1988). Maximum likelihood an introduction.

169. BREIMAN, L. (Aug.1988, revised Feb. 1989). Submodel selection and evaluation in regression I. The X-fixed case and little bootstrap.

170. LE CAM, L. (September 1988). On the Prokhorov distance between the empirical process and the associated Gaussian bridge.

171. STONE, C.J. (September 1988). Large-sample inference for logspline models.

172. ADLER, R.J. and EPSTEIN, R. (September 1988). Intersection local times for infinite systems of planar brownian motions and for the brownian density process.

173. MILLAR, P.W. (October 1988). Optimal estimation in the non-parametric multiplicative intensity model.

174. YOR, M. (October 1988). Interwinings of Bessel processes.

175. ROJO, J. (October 1988). On the concept of tail-heaviness.

176. ABRAHAMS, D.M. and RIZZARDI, F. (September 1988). BLSS - The Berkeley interactive statistical system: An overview.

177. MILLAR, P.W. (October 1988). Gamma-funnels in the domain of a probability, with statistical implications.

178. DONOHO, D.L. and LIU, R.C. (October 1988). Hardest one-dimensional subfamilies.

179. DONOHO, D.L. and STARK, P.B. (October 1988). Recovery of sparse signals from data missing low frequencies.

180. FREEDMAN, D.A. and PITMAN, J.A. (Nov. 1988). A measure which is singular and uniformly locally uniform. (Revision of Tech Report No. 163).

181. DOKSUM, K.A. and HOYLAND, ARNLJOT (Nov. 1988, revised Jan. 1989). A model for step-stress accelerated life testing experiments based on Wiener processes and the inverse Gaussian distribution.

182. DALANG, R.C., MORTON, A. and WILLINGER, W. (November 1988). Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models.

183. BERAN, R. (November 1988). Calibrating prediction regions.

184. BARLOW, M.T., PITMAN, J. and YOR, M. (Feb. 1989). On Walsh's Brownian Motions.

185. DALANG, R.C. and WALSH, J.B. (Dec. 1988). Almost-equivalence of the germ-field Markov property and the sharp Markov property of the Brownian sheet.

186. HESSE, C.H. (Dec. 1988). Level-Crossing of integrated Ornstein-Uhlenbeck processes

187. NEVEU, J. and PITMAN, J.W. (Feb. 1989). Renewal property of the extrema and tree property of the excursion of a one-dimensional brownian motion.

188. NEVEU, J. and PITMAN, J.W. (Feb. 1989). The branching process in a brownian excursion.

189. PITMAN, J.W. and YOR, M. (Mar. 1989). Some extensions of the arcsine law.

190. STARK, P.B. (Dec. 1988). Duality and discretization in linear inverse problems.

191. LEHMANN, E.L. and SCHOLZ, F.W. (Jan. 1989). Ancillarity.

192. PEMANTLE, R. (Feb. 1989). A time-dependent version of Pólya's urn.

193. PEMANTLE, R. (Feb. 1989). Nonconvergence to unstable points in urn models and stochastic approximations.

194. PEMANTLE, R. (Feb. 1989). When are touchpoints limits for generalized Pólya urns.

195. PEMANTLE, R. (Feb. 1989). Random walk in a random environment and first-passage percolation on trees.

196. BARLOW, M., PITMAN, J. and YOR, M. (Feb. 1989). Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus.

Copies of these Reports plus the most recent additions to the Technical Report series are available from the Statistics Department technical typist in room 379 Evans Hall or may be requested by mail from:

Department of Statistics
University of California
Berkeley, California 94720

Cost: $1 per copy.